

1.1.1 Aussagenlogik:

Die Menge der aussagenlogischen Formeln ist induktiv definiert durch (1) $0, 1 \in AL$ (2) $\tau \in AL$ (3) $\psi, \varphi \in AL \Rightarrow \neg\psi, \neg\varphi, \psi \wedge \varphi, \psi \vee \varphi, \psi \rightarrow \varphi, \psi \leftrightarrow \varphi \in AL$

induktives Beweisprinzip: (1) Alle atomaren Formeln haben die Eigenschaft E (2) Haben ψ und $\varphi \in AL$ die Eigenschaften E , so auch $\neg\psi$ und $(\psi \circ \varphi) \dots$

Formeltiefe: (1) $d(\psi) := 0$ für atomare ψ , (2) $d(\neg\psi) := d(\psi) + 1$ und (3) $d((\psi \circ \varphi)) := 1 + \max(d(\psi), d(\varphi))$.

Koinzidenzlemma: Sei $\psi \in AL$ eine Formel und seien I, I' zwei zu ψ passende Interpretationen, so dass $I(X) = I'(X) \forall X \in \tau(\psi)$. Dann ist $I(\psi) = I'(\psi)$.

Eine Formel ψ ist genau dann erfüllbar, wenn $\neg\psi$ keine Tautologie ist.
 $\emptyset: \bigwedge \emptyset = 1, \bigvee \emptyset = 0$ **DNF:** $\bigvee_{i=1}^n \bigwedge_{j=1}^m Y_{ij}$ **KNF:** $\bigwedge_{i=1}^n \bigvee_{j=1}^m Y_{ij}$

Logische Äquivalenzen: (1) $\neg(\psi \wedge \varphi) \equiv \neg\psi \vee \neg\varphi, \neg(\psi \vee \varphi) \equiv \neg\psi \wedge \neg\varphi$ (2) $\psi \rightarrow \varphi \equiv \neg\psi \vee \varphi$ (3) $\psi \wedge (\psi \vee \varphi) \equiv \psi, \psi \vee (\psi \wedge \varphi) \equiv \psi$

funktional vollständig: $\{\wedge, \vee, \neg\}, \{\wedge, \neg\}, \{\vee, \neg\}, \{\rightarrow, \neg\}, \{\vee, \neg\}, \{\rightarrow, 0\}$
nicht funktional vollständig: $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

Hornformel: Eine AL Formel ist eine Hornformel $\psi = \bigwedge_{i=1}^n \bigvee_{j=1}^m Y_{ij}$ in KNF, wobei jede Disjunktion $\bigvee_j Y_{ij}$ höchstens ein positives Literal enthält. **Anmerk.** (1) $\neg X_1 \vee \dots \vee \neg X_k \vee X \equiv X_1 \wedge \dots \wedge X_k \rightarrow X$ Für $k = 0$ folgt $1 \rightarrow X$ (2) $\neg X_1 \vee \dots \vee \neg X_k \equiv X_1 \wedge \dots \wedge X_k \rightarrow 0$

Erfüllbarkeitstest für Horn: Fangen mit leerer Menge an. Nehme sukzessive alle X_i auf, die mit 1 interpretiert werden müssen ... Ergebnis (falls erfüllbar) ist kleinstes Modell.

Semantische Folgerungsbeziehung: Ein Modell einer Formelmengemenge $\Phi \subseteq AL$, ist eine Interpretation I , so dass $I(\varphi) = 1$ für alle $\varphi \in \Phi$. Wir sagen $\Phi \models \psi$ genau dann, wenn jede zu $\Phi \cup \{\psi\}$ passende Interpretation, welche Modell von Φ ist, auch Modell von ψ ist. Es gilt immer: $0 \models \varphi$ und $\varphi \models 1$

$\varphi \models \psi \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \psi$ Tautologie; $\Phi \models \psi \Leftrightarrow \Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar; $\emptyset \models \psi \Leftrightarrow \psi$ Tautologie; $\Phi \models \psi$ und $\Phi \models \neg\psi$, dann Φ unerfüllbar; Φ unerfüllbar $\Rightarrow \Phi \models \psi$ für alle $\psi \in AL$

Kompaktheitsatz: Sei $\Phi \subseteq AL, \psi \in AL$. (i) Φ ist erfüllbar \Leftrightarrow jede endliche Teilmenge ist erfüllbar (ii) $\Phi \models \psi \Leftrightarrow \exists \Phi_0 \subseteq \Phi$, so dass $\Phi_0 \models \psi$.

Zorn: Sei $(A, <)$ eine nicht-leere partielle Ordnung in der jede Kette nach oben beschränkt ist. Dann besitzt $(A, <)$ ein maximales Element.

König: Sei T ein endlich verzweigter Baum mit Wurzel w , in dem es beliebig lange endliche Wege gibt. Dann gibt es auch einen unendlichen Weg in T , der bei der Wurzel w beginnt.

Klauselmengemenge: Klausel = endl. Menge von Literalen; $\square =$ leere Klausel.
 $\psi = \bigwedge_{i=1}^n \bigvee_{j=1}^{m_i} Y_{ij}$ und $\bigvee_{j=1}^{m_i} Y_{ij} = C_i$; endl. Klauselmengemenge = $K(\psi) := \{C_1, \dots, C_n\}$. Die leere Klauselmengemenge ist erfüllbar. Wenn $\square \in K$, dann ist K unerfüllbar.

Resolutionslemma: Sei K ein Klauselmengemenge, $C_1, C_2 \in K$ und C Resolvente von C_1 und C_2 . Dann sind K und $K \cup \{C\}$ äquivalent.

Resolutionsatz: Eine Klauselmengemenge K ist unerfüllbar genau dann, wenn $\square \in Res^*(K)$. Es gilt: $\varphi \models \psi \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\psi$ unerfüllbar

1.1.2 Strukturen und Homomorphismen:

Mächtigkeit: Jede abzählbare Menge ist entweder endlich oder gleichmächtig zu \mathbb{N} . Keine Menge ist gleichmächtig zu ihrer Potenzmenge $Pot(A) := \{B : B \subseteq A\}$

Strukturen: (Universum, Relationen, Funktionen) **Signatur:** $\tau := \bigcup R^n(\tau) \cup \bigcup F^n(\tau)$

Substruktur: $\mathcal{A}, \mathcal{B} \tau$ -Strukturen. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ (\mathcal{A} Substruktur von \mathcal{B}), wenn: (1) $A \subseteq B$ (2) $\forall n \in \mathbb{N}, R \in R^n(\tau): R^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{B}} \cap A^n$ (3) $\forall n \in \mathbb{N}, f \in F^n(\tau): f^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{B}}|_A$ ($f^{\mathcal{A}}$ Restriktion von $f^{\mathcal{B}}$ auf A)

Während beim Begriffspaar Substruktur/Erweiterung die Signatur fest bleibt und das Universum verändert wird, ist dies beim Begriffspaar Redukt/Expansion, genau umgekehrt. Substrukturen müssen τ -abgeschlossen sein. Zu jeder nicht-leeren τ -abgeschlossenen Teilmenge $A \subseteq B$, gibt es genau eine Substruktur von \mathcal{B} mit Träger A . (=induzierte Substr.)

Homomorphismus: (1) Für jedes Rel.symbol $R \in R^n(\tau)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt: $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathcal{A}} \Rightarrow (\pi a_1, \dots, \pi a_n) \in R^{\mathcal{B}}$. (2) Für jedes Fkt.symbol $f \in F^n(\tau)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt: $(\pi f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) \in R^{\mathcal{B}}(\pi a_1, \dots, \pi a_n)$.

starker \sim : (1) Für jedes Rel.symbol $R \in R^n(\tau)$ und alle $\bar{a} \in A^n$ gilt: $\bar{a} \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \pi \bar{a} \in R^{\mathcal{B}}$. **Einbettung:** injektiver, starker Hom. **Isomorphismus:** bijektiver starker Hom. ($\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$). **Automorphismus:** $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

1.1.3 Syntax und Semantik der Prädikatenlogik

Signatur: τ, τ -Terme, τ -Formeln, $Alph(\tau) := \{\text{Rel, Fktn, VAR} = \{v_0, \dots, v_n\}, =, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \exists, \forall, (,)\}$. **τ -Terme:** $T(\tau) := (1) \text{VAR} \subseteq T(\tau)$ (2) wenn t_1, \dots, t_n τ -Terme und $f \in F^n(\tau)$, dann auch ft_1, \dots, t_n . **τ -Formeln:** $FO(\tau) := (1)$ sind t_1, t_2 τ -Terme, dann ist $t_1 = t_2$ eine τ -Formel (2) sind t_1, \dots, t_n Terme aus $T(\tau)$ und ist $P \in \tau$ ein n -stelliges Rel.symbol, dann ist $Pt_1 \dots t_n$ eine τ -Formel. (3) wenn ψ , dann auch $\neg\psi$. (4) wenn ψ und φ , dann auch $(\psi \wedge \varphi), (\psi \vee \varphi)$ und $(\psi \rightarrow \varphi)$. (5) wenn ψ und $x \in \text{VAR}$, dann $\exists x\psi$ und $\forall x\psi$.

τ -Satz: τ -Formeln ohne freie Variablen.
 τ -Interpretation: $I = (\mathcal{A}, \beta)$

Koinzidenzlemma: Sei $\psi \in FO(\sigma \cap \tau), (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ -Interpretation und (\mathcal{A}', β') eine τ -Interpretation, so dass folgendes gilt: (i) \mathcal{A} und \mathcal{A}' haben dasselbe $(\sigma \cap \tau)$ -Redukt: $\mathcal{A}[\sigma \cap \tau] = \mathcal{A}'[\sigma \cap \tau]$. (ii) $\text{Frei}(\beta) \subseteq \text{Def}(\beta') \cap \text{Def}(\beta')$ und $\beta(x) = \beta'(x)$ für alle $x \in \text{Frei}(\psi)$. Dann gilt: $\mathcal{A} \models \psi[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \psi[\beta']$.

Modellklasse von Φ : $Mod(\Phi)$ besteht aus allen τ -Strukturen \mathcal{A} mit $\mathcal{A} \models \Phi$. Klasse \mathcal{K} von τ -Strukturen ist axiomatisiert durch Φ , wenn $\mathcal{K} = Mod(\Phi)$.

semantische Folgerungsbeziehung: Sei $\Phi \subseteq FO(\tau)$ eine Formelmengemenge, $\psi \in FO(\tau)$ eine Formel. Wir sagen, ψ folgt aus Φ (kurz $\Phi \models \psi$) genau dann, wenn jede zu $\Phi \cup \{\psi\}$ passende Interpretation, welche Modell von Φ ist, auch Modell von ψ ist. Wenn $\Phi = \{\varphi\}$ schreiben wir auch $\varphi \models \psi$ anstelle von $\{\varphi\} \models \psi$.

Abschluss: Sei ψ eine Formel mit freien Variablen x_1, \dots, x_k . Dann nennen wir die Sätze $\exists x_1 \dots \exists x_k \psi$ und $\forall x_1 \dots \forall x_k \psi$ den existentiellen bzw. universellen \sim von ψ .

erfüllbar: Formel \sim genau dann, wenn ihr existentieller Abschluss erfüllbar. **allgemeingültig:** Formel \sim genau dann, wenn ihr universeller Abschluss allgemeingültig.

Substitutionlemma: Für jeden Term $t \in T(\tau)$, jede Formel $\psi \in FO(\tau)$, jede Substitution $\rho : \text{VAR} \rightarrow T(\tau)$ und jede zu $t[\rho]$ bzw. $\psi[\rho]$ passende Interpretation I gilt: (i) $[t[\rho]]^I = [t[\rho]]^{I \circ \rho}$. (ii) $I \models \psi[\rho] \Leftrightarrow (I \circ \rho) \models \psi$. Gebundene Variablen werden nicht ersetzt.

Normalformen: [NNF:] Negationen nur vor Literalen, kein \rightarrow [PränexNF:] NNF bereinigen, dann alle Quantoren nach vorne [SkolemNF:] Existenzquantoren (\exists) durch [Allquantoren-stellige Funktionen ersetzen.

Auswertungsspiel: $MC(\mathcal{I}, \psi)$, Verifizierer V, Falsifizierer F. An Position (φ, β) geht Spiel abhängig von φ wie folgt weiter: [φ Literal] Spiel zuende. Falls $\mathcal{A} \models \varphi[\beta]$ gewinnt V, sonst F.

[$\vartheta \vee \eta, \beta$] V am Zug, entweder zu ϑ oder η ziehen.
[$\vartheta \wedge \eta, \beta$] F am Zug, entweder zu ϑ oder η ziehen.
[$\exists x\vartheta, \beta$] V wählt ein $a \in A$ und zieht zu $\vartheta, \beta[x/a]$.
[$\forall x\vartheta, \beta$] F wählt ein $a \in A$ und zieht zu $\vartheta, \beta[x/a]$.

1.1.4 Modallogik:

ML: (mit Aktionen $a \in A$ und atomaren Eigenschaften P_i für $i \in I$): (1) alle aussagenl. Formeln mit AusVar P_i (2) $\psi, \varphi \in ML \Rightarrow \neg, \vee, \wedge, \rightarrow$. (3) $\psi \in ML$ dann auch $\langle a \rangle [a]$, wobei $\langle a \rangle$ für \exists und $[a]$ für \forall steht.

[a]0: es gibt keinen a-NF; $\langle a \rangle$ 1: es gibt einen a-NF

Kripkestruktur: $\mathcal{K} = (V, (E_a)_{a \in A}, (P_i)_{i \in I})$. ψ ist erfüllbar in \mathcal{K} , wenn v in \mathcal{K} ex., mit $\mathcal{K}, v \models \psi$. ψ sind $\psi \equiv \varphi$ wenn $[\psi]^{\mathcal{K}} = [\varphi]^{\mathcal{K}}$ für alle zu beiden passenden \mathcal{K} .

Bisimulation: Seien \mathcal{K} und \mathcal{K}' zwei Kripkestrukturen. Eine Bisimulation zwischen $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ ist eine Relation $Z \subseteq V \times V'$, so daß für alle $(v, v') \in Z$ gilt. (1) $v \in P_i \Leftrightarrow v' \in P'_i$ für alle $i \in I$ (2) HIN: Für alle $a \in A, w \in V$ mit $v \xrightarrow{a} w$ ex. ein $w' \in V'$ mit $v' \xrightarrow{a} w'$ und $(w, w') \in Z$ HER: Für alle $a \in A, w' \in V$ mit $v' \xrightarrow{a} w'$ ex. ein $w \in V$ mit $v \xrightarrow{a} w$ und $(w, w') \in Z$

Bisimulationsspiel: (1) Man spielt auf einem Pfad (2) Der Falsifizierer verliert, wenn er an einen Knoten gelangt, dem keine Transition ausgeht. Die Verifiziererin verliert, wenn sie nicht mit der entsprechenden Aktion antworten kann ($v \in P_i$ und $v' \notin P'_i$). Sie gewinnt, wenn sie nie verliert, also wenn $\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}', u'$.

n-Bisimilarität: Das Spiel geht nur über n Züge. $\mathcal{K}, u \sim_n \mathcal{K}', u'$ Wenn $\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}', u'$, dann ist auch $\mathcal{K}, u \sim_n \mathcal{K}', u'$. Die Umkehrung gilt jedoch nicht.

Modaltiefe: (1) $md(\psi) = 0$ für alle aussagenlogischen Formeln (2) $md(\neg\psi) = md(\psi)$ (3) $md(\psi \circ \varphi) = \max(md(\psi), md(\varphi))$ für alle $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ (4) $md(\langle a \rangle \psi) = md([a]\psi) = md(\psi) + 1$

ML-Äquivalenz: (1) $\mathcal{K}, v \equiv_{ML} \mathcal{K}', v'$, wenn für alle $\psi \in ML$ gilt: $\mathcal{K}, v \models \psi \Leftrightarrow \mathcal{K}', v' \models \psi$ (2) $\mathcal{K}, v \equiv_{ML}^n \mathcal{K}', v'$, wenn für alle $\psi \in ML$ $md(\psi) \leq n$ gilt: $\mathcal{K}, v \models \psi \Leftrightarrow \mathcal{K}', v' \models \psi$

Bisimulationsinvarianz: Modallogische Formeln können bisimilare Zustände nicht unterscheiden. (1) $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v' \Rightarrow \mathcal{K}, v \equiv_{ML} \mathcal{K}', v'$ (2) $\mathcal{K}, v \sim_n \mathcal{K}', v' \Rightarrow \mathcal{K}, v \equiv_{ML}^n \mathcal{K}', v'$ Wenn $\mathcal{K}, v \models \psi$ und $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$ dann auch $\mathcal{K}', v' \models \psi$. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Sind $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ endlich verzweigt, dann: $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v' \Rightarrow \mathcal{K}, v \equiv_{ML} \mathcal{K}', v'$.

Entscheidbarkeit: Das Erfüllbarkeitsproblem für ML ist entscheidbar, denn zu jeder erfüllbaren Formel $\psi \in ML$ ex. endliche Baumstruktur T, v mit $Tiefe \leq md(\psi)$ und $Verzweigungsgrad \leq |C(\psi)|$, so dass $T, v \models \psi$. Also hat ML insbesondere die endliche Baummodell-Eigenschaft.

CTL: (1) Alle aussagenlogischen Formel über $\{P_i : i \in I\}$ gehören zu CTL. (2) CTL ist abgeschlossen unter $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$. (3) Wenn $\psi, \varphi \in CTL$, dann auch: $EX\psi, AX\psi, E(\psi U \varphi), A(\psi U \varphi)$.

Semantik von CTL: (1) $X\psi$ bedeutet am nächsten gilt ψ (2) $\psi U \varphi$ bedeutet: es gilt solange ψ (auch am aktuellen Knoten) bis φ gilt (3) $EX\psi := \Diamond\psi$ (4) $AX\psi := \Box\psi$ (5) $F\psi := (U\psi)$: irgendwann gilt ψ (6) $G\psi := \neg F\neg\psi$: es gilt immer ψ

Beispiele für CTL: (1) $EF\varphi$: es kann Zustand erreicht werden, an dem φ gilt. (2) $AG\neg(P \wedge Q)$: P und Q schließen sich in allen erreichbaren Zuständen aus. (3) $AF\neg\psi$: auf allen Pfaden gilt irgendwann ψ . (4) $AGAF\psi$: ψ gilt unendlich oft auf allen Pfaden.

1.1.5 Definierbarkeit in der Prädikatenlogik:

FO-axiomatisierbar: Eine Strukturklasse \mathcal{K} heisst \sim , wenn eine Satzmenge $\Phi \subseteq FO(\tau)$ existiert, so dass $\mathcal{K} = Mod(\Phi)$. Wenn Φ endlich für \mathcal{K} , dann endlich axiomatisierbar.

Beispiele:
Definierbarkeit (in einer Struktur): Sei $\psi(x_1, \dots, x_r) \in FO(\tau)$ und \mathcal{A} eine τ -Struktur. Dann definiert ψ in \mathcal{A} die r -stellige Relation $\psi^{\mathcal{A}} := \{(a_1, \dots, a_r) : \mathcal{A} \models \psi(a_1, \dots, a_r)\} \subseteq A^r$.

Eine Relation $R \subseteq A^r$ auf dem Universum einer τ -Struktur ist (elementar) definierbar in \mathcal{A} , wenn $R = \psi^{\mathcal{A}}$ für eine Formel $\psi \in FO(\tau)$. Eine Funktion $f : A^r \rightarrow A$ heisst elementar definierbar, wenn ihr Graph R_f elementar definierbar ist.

FO-Formeln können nicht zwischen isomorphen Strukturen unterscheiden.

Isomorphielemma: Sei $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ ein Isom. von τ -Strukturen. Dann gilt für alle $\psi(x_1, \dots, x_n) \in FO(\tau)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$ $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \psi(\pi a_1, \dots, \pi a_n)$

Theorie Th(0): Eine Theorie ist eine erfüllbare Menge $T \subseteq FO(\tau)$ von Sätzen, die unter \models abgeschlossen ist, d.h. es gilt für alle τ -Sätze ψ : $T \models \psi \Rightarrow \psi \in T$. Eine Theorie ist vollständig, wenn für jeden Satz $\psi \in FO(\tau)$ entweder $\psi \in T$ oder $\neg\psi \in T$.

Quantorenrang $qr(\psi)$: (1) = 0 für quantorenfreie ψ (2) $qr(\psi) = qr(\neg\psi)$ (3) $qr(\psi \circ \varphi) = \max(qr(\psi), qr(\varphi))$ mit $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ (4) $qr(\exists x\psi) = qr(\forall x\psi) = qr(\psi) + 1$

Ehrenfeucht-Fraïssé: Sei τ endlich und relational. \mathcal{A}, \mathcal{B} τ -Strukturen. (1) Folgende Aussagen sind äquivalent: (i) $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ (ii) Die Duplikatorin gewinnt das EF-Spiel $G(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (2) Für alle $m \in \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent: (i) $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$ (ii) Die Duplikatorin gewinnt $G_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

axiomatisierbar: versuchen, Strukturen $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ und $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{K}$ zu finden, dann zeigen, dass die Duplikatorin $G_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}_m)$ gewinnt, denn dann können \mathcal{A} und \mathcal{B} nicht durch FO-Sätze unterschieden, also auch nicht endlich axiomatisiert werden.

1.1.6 Entscheidbarkeit:

Sequenzkalkül: Sei $\Phi \subseteq FO(\sigma)$ ein Menge von Sätzen. Ein Satz ψ ist **ableitbar** aus dem Axiomensystem Φ , (kurz $\Phi \vdash \psi$), wenn eine endliche Teilmenge Γ von Φ existiert, so dass die Sequenz $\Gamma \Rightarrow \psi$ im Sequenzkalkül ableitbar ist. Eine Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist ableitbar aus Φ , wenn es eine ableitbare Sequenz $\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta$ gibt, mit $\Gamma' \subseteq \Phi$. Φ heißt konsistent, wenn nicht jeder Satz (der entsprechenden Signatur) ableitbar ist.

Vollständigkeitssatz: Für jede Menge $\Phi \subseteq FO(\sigma)$ und jeden Satz $\psi \in FO(\sigma)$ gilt: (1) $\Phi \models \psi \Leftrightarrow \Phi \vdash \psi$ (2) Φ erfüllbar $\Leftrightarrow \Phi$ konsistent.

Löwenheim, Skolem: Jede erfüllbare, abzählbare Satzmenge hat ein abzählbares Modell. (Eine Formelmeng über einer abzählbaren Signatur ist immer abzählbar.)

Kompaktheitssatz der FO: Für jede Menge $\Phi \subseteq FO(\tau)$ und jedes $\psi \in FO(\tau)$ (i) $\Phi \models \psi$ gdw. eine endl. Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ existiert, so dass $\Phi_0 \models \psi$. (ii) Φ ist erfüllbar gdw. jede endl. Teilmenge von Φ erfüllbar ist.

Satz 6.15: Sei $\Phi \subseteq FO(\tau)$ eine Satzmenge mit beliebig grossen endlichen Modellen (d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Modell $\mathcal{A} \models \Phi$ mit endlichem \mathcal{A} und $|\mathcal{A}| > n$). Dann hat Φ auch ein unendliches Modell.

Die Klasse aller **endlichen τ -Strukturen** ist nicht axiomatisierbar in FO. **aufsteigender Satz v. Löwenheim-Skolem:** Φ besitze ein unendliches Modell. Dann gibt es zu jeder Menge M ein Modell $D \models \Phi$ über einem Universum D welches mindestens so mächtig wie M ist.

Satz 6.20: Sei \mathcal{A} eine unendliche Struktur. Dann gibt es eine Struktur \mathcal{B} mit $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, aber $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{B}$. Insbesondere ist die Isomorphieklasse $\{\mathcal{B} : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}\}$ von \mathcal{A} nicht axiomatisierbar in FO.

1.1.7 Sequenzkalkül:

Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist **gültig** wenn jedes Modell von Γ auch ein Modell mind. einer Formel aus Δ ist, d.h. wenn $\bigwedge \Gamma \models \bigvee \Delta$.

(1) Jede Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ mit $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$ ist gültig (Axiome). (2) Γ, Δ Menge von AV. $\Gamma \Rightarrow \Delta$ falsifizierbar gdw. Γ und Δ disjunkt. (3) $\Gamma \Rightarrow \emptyset$ gültig gdw. Γ unerfüllbar. (4) $\emptyset \Rightarrow \Delta$ gültig gdw. $\bigvee \Delta$ Tautologie. (5) ψ gültig gdw. $\emptyset \Rightarrow \psi$ gültig.

$$\begin{array}{ll} (\neg \Rightarrow) & \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma, \neg\psi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg) \quad \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi} \\ (\vee \Rightarrow) & \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \vee \vartheta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \vee) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \vartheta} \\ (\wedge \Rightarrow) & \frac{\Gamma, \psi, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \wedge \vartheta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \wedge) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \vartheta} \\ (\rightarrow \Rightarrow) & \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \rightarrow \vartheta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \rightarrow) \quad \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \rightarrow \vartheta} \\ (=) & \frac{\Gamma, t = t \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \\ (S \Rightarrow) & \frac{\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, t = t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow S) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma, t = t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')} \\ (\exists \Rightarrow) & \frac{\Gamma, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \exists) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \\ & \text{wenn } c \text{ in } \Gamma, \Delta, \psi(x) \\ & \text{nicht vorkommt.} \\ (\forall \Rightarrow) & \frac{\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \forall) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \\ & \text{wenn } c \text{ in } \Gamma, \Delta, \psi(x) \\ & \text{nicht vorkommt.} \end{array}$$

Gegenbeispiele: Wenn c in $\Gamma, \Delta, \psi(x)$ vorkommt:
 $(\exists \Rightarrow)$: $\Gamma = \emptyset, \psi(x) = Px, \Delta = Pc$ Beg $(\Rightarrow \forall)$: $\Gamma = Pc, \psi(x) = Px, \Delta = \emptyset$

1.1.8 Anleitungen:

nicht endlich axiom. mit EF: Wähle $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ und $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{K}$ (mit lediglich der m -fachen gewünschten Eigenschaft [von K]). Also gewinnt die Duplik. jedes Spiel $G_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}_m)$, woraus folgt, dass kein Satz $\psi \in FO(\tau)$ \mathcal{A} und \mathcal{B}_m trennt.

K nicht axiom. mit Kompakt.: Angenommen Φ axiomatisiere \mathcal{K} . Bilde $\Psi := \Phi \cup$ Gegenteil. Zu Zeigen: jedes endliche $\Psi_0 \subseteq \Psi$ Gegenteil beschränkt bis n_0 ist erfüllbar. Nach Komp.satz wäre dann auch Ψ erfüllbar, das geht aber nicht, da Gegenteil drin ist.

1.1.9 Axiomensysteme

lineare Ordnung:

$\Phi_{<} = \{\forall x \neg x < x, \forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z), \forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)\}$.

dichte Ordnung: $\varphi_{\text{dicht}} = \forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$

diskrete Ordnung: $\varphi_{\text{diskret}} = \forall x (\exists y (x < y) \rightarrow \exists y ((x < y) \wedge \forall z (x < z \rightarrow y \leq z))) \wedge \forall x (\exists y (x > y) \rightarrow \exists y (x > y) \wedge \forall z (x > z \rightarrow y \geq z))$

Gruppe: $\varphi_{\text{Gruppe}} = \forall x \forall y \forall z ((x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)) \wedge \exists n (\forall y (n \circ y = y \wedge y \circ n = y) \wedge \forall x \exists y (x \circ y = n \wedge y \circ x = n))$

unendliche Menge:

$\Phi_{\infty} = \{\varphi_{\geq n} : n \in \mathbb{N}\}, \varphi_{\geq n} := \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j$

1.1.10 Rechenregeln:

AL:

(1) $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$ (2) $\neg(\psi \wedge \varphi) \equiv \neg\psi \vee \neg\varphi$ (3) $\neg(\psi \vee \varphi) \equiv \neg\psi \wedge \neg\varphi$ (4) $\vartheta \wedge (\psi \vee \varphi) \equiv (\vartheta \wedge \psi) \vee (\vartheta \wedge \varphi)$ (5) $\vartheta \vee (\psi \wedge \varphi) \equiv (\vartheta \vee \psi) \wedge (\vartheta \vee \varphi)$

Normalformen:

(1) $\exists x(\psi \vee \varphi) \equiv \exists x\psi \vee \exists x\varphi$ (2) $\forall x(\psi \wedge \varphi) \equiv \forall x\psi \wedge \forall x\varphi$

(3-6) falls x nicht frei in ψ vorkommt

(3) $\psi \vee \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \vee \varphi)$ (4) $\psi \wedge \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \wedge \varphi)$

(5) $\psi \vee \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \vee \varphi)$ (6) $\psi \wedge \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \wedge \varphi)$

(7) $\neg\exists x\psi \equiv \forall x\neg\psi$ (8) $\neg\forall x\psi \equiv \exists x\neg\psi$

1.1.11 Sonstiges:

Formel für Übertrag: $U_0(X_n, \dots, X_0, Y_n, \dots, Y_0) := 0$

$U_m(X_n, \dots, X_0, Y_n, \dots, Y_0) := (X_{m-1} \wedge Y_{m-1}) \vee (X_{m-1} \wedge U_{m-1}) \vee (Y_{m-1} \wedge U_{m-1})$